MPA S2 algèbre

Responsable : Christine Huyghe

Contrôle Continu du 21 mai 2013. Durée : 3h.

Il sera accordé le plus grand soin à la qualité de la rédaction. Sont interdits : les documents, les téléphones portables, les baladeurs, et tout autre objet électronique (calculatrice, ...). Le barême noté n'est qu'indicatif.

Cours (4 pts). Soit K un corps.

1- Soient K un corps et E un K-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. Montrer que u est injectif si et seulement si l'image d'une base de E par u est une base.

Vrai/Faux (6 pts). Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier votre réponse : donner une démonstration si vous trouvez que l'affirmation est juste. Dans le cas contraire, donner un contre-exemple.

a- Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E tel que $u^3 = Id$. Alors les valeurs propres λ de u vérifient $\lambda^3 = 1$.

b- Soient $E = \mathbb{C}^3$ et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors si $u^3 = 0$, on a $u^2 = 0$.

c- Soient $E = \mathbb{C}^3$, $u \in \mathcal{L}(E)$, $x \in E$, alors il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{C}$ non tous nuls, tels que $\lambda_1 x + \lambda_2 u(x) + \lambda_3 u^2 + \lambda_4 u^3(x) = 0$.

d- Soit $t \in \mathbb{R}$, les 4 vecteurs suivants forment une base de $\mathbb{C}^4$:

$$U = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} 1 \\ t^2+1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

e- Soient K un corps et E un K-espace vectoriel de dimension finie, $f, g \in \mathcal{L}(E)$, alors $Im(f+g) \subset Im(f) + Im(g)$.

f- Deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$ qui ont même rang ont aussi même trace.

Exercice 1 (5 pts). a- Soit $A = (a_{i,j}) \in M_3(\mathbb{R})$. Calculer $Tr(A({}^tA))$ en fonction des coefficients $a_{i,j}$ et montrer que $Tr(A({}^tA)) = 0$ si et seulement si $A = 0$.

b- Montrer que l'application Φ_A :

$$\begin{array}{rcl} M_3(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & Tr(AM), \end{array}$$

est une forme linéaire non nulle si $A \neq 0$, ce qu'on suppose dans la suite de l'exercice.

c- Soient $H_A = Ker(\Phi_A)$ et $H = Ker(\Phi_{Id})$. Quelle est la dimension de H_A ? Donner une base de H. (Indication : on pourra chercher une base constitutée de la somme de au plus 2 matrices élémentaires).

1- a- On suppose que A est inversible, donner une base de H_A.

d- Soit

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Donner une base de H_J constituée de matrices élémentaires.

e- Soit A une matrice de rang 1. Donner une base de H_A.

Exercice 2 (6 pts) Soit $t \in \mathbb{R}$, et $A \in M_3(\mathbb{C})$ la matrice

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2+t & 2 \\ 1 & 0 & 1-t \end{bmatrix}.$$

a- Calculer $P_A(X)$ le polynôme caractéristique de la matrice A, et le factoriser.

b- Quelles sont les valeurs propres complexes de A ?

c- Discuter, suivant les différentes valeurs de t, la dimension des sous-espaces propres (dans $\mathbb{C}^3$) associés à A.

1- Pour quelles valeurs de t la matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$? sur $\mathbb{R}$?

2- On suppose que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

d- Donner une matrice diagonale D et une matrice inversible P de $GL_3(\mathbb{C})$ telles que

$$A = PDP^{-1}.$$

e- Montrer que

$$(A + Id)(A - (1-t)Id)(A - (2+t)Id) = 0.$$

3- On suppose que $t = -1/2$.

f- Montrer que A est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

g- Montrer qu'on a

$$(A + Id)(A - \frac{3}{2}Id)^2 = 0.$$